

# EIN DIREKTES VARIATIONSVERFAHREN ZUR BEHANDLUNG DER WÄRMEÜBERTRAGUNGSPROBLEME FÜR ERZWUNGENE KONVEKTION

B. KRAJEWSKI

Department of Reactor Engineering, Institute of Nuclear Research, Świerk, near Warsaw, Poland

**Zusammenfassung**—In der vorliegenden Arbeit ist ein direktes Variationsverfahren angegeben, welches die Bestimmung des Temperaturfeldes in erzwungener Konvektion gestattet.

Das vorgeschlagene Verfahren beruht auf dem ergänzten Satz der begrenzten oder partiellen Variation, der zuerst von Rosen formuliert wurde. Die gemachte Ergänzung des Satzes ermöglicht dann die notwendigen Bedingungen, die für die Existenz des Variationsintegrals nötig sind, zu befriedigen.

Unabhängig davon sind auch die speziellen Sätze angegeben, die das Konstruieren der angenäherten Lösung in strenger, genügend vollständiger Art gestatten.

Der Vorteil der vorgeschlagenen Methode besteht darin, dass man damit nicht nur lineare, sondern auch nichtlineare Aufgaben lösen kann.

Um den Rechnungsgang dieses Verfahrens zu erläutern, sind drei Beispiele durchgerechnet und die gewonnenen Näherungswerte mit den exakten Werten verglichen.

## BEZEICHNUNGEN

$T$ ,	Temperatur;
$\lambda$ ,	Wärmeleitfähigkeit der Flüssigkeit;
$\kappa$ ,	$(\lambda/C_p \cdot \rho)$ , Temperaturleitfähigkeit der Flüssigkeit;
$c_p$ ,	spezifische Wärme der Flüssigkeit;
$u$ ,	axiale Komponente der Geschwindigkeit;
$\xi, \eta, \zeta$ ,	rechtwinklige Koordinaten, wobei $\zeta$ eine axiale Koordinate bedeutet;
$\rho$ ,	Dichte der Flüssigkeit;
$\Phi$ ,	Wärmequellendichte;
$q(\zeta)$ ,	Wärmestromdichte;
$F$ ,	Querschnittsfläche des Kanals;
$\Gamma$ ,	Umfang des Querschnittes für $\zeta = \text{const.}$ ;
$\alpha$ ,	Wärmeübergangskoeffizient;
$Pe$ ,	$(D_t \cdot u/\kappa)$ , Peclet'sche Zahl;
$D_t$ ,	thermischer Durchmesser ( $4 \times$ Querschnittsfläche/wärmeaustauschender Umfang);
$L$ ,	dimensionslose Länge des Kanals.

## 1. EINLEITUNG

ZUR LÖSUNG der Wärmeströmungsaufgaben, die mit nicht stationärer Wärmeleitung wie auch mit erzwungener Konvektion zu tun haben, verwendet man im allgemeinen verschiedene Methoden, wobei wir im wesentlichen drei Fälle unterscheiden:

1. Die Methoden, die zur exakten Lösung führen
2. Die numerischen Methoden
3. Die analytischen Näherungsmethoden

Die erste der erwähnten Methoden ist nur für einfache Fälle anwendbar d.h., nur für die Aufgaben, die wegen einfacher Geometrie exakt lösbar sind. In den praktischen Problemen der Technik begegnet man dagegen oft Aufgaben, deren exakte Lösung entweder nicht gefunden werden kann, oder so kompliziert ist, dass sie sich für die effektive Rechnung kaum eignet.

Die numerischen Methoden wie z.B. das Differenzenverfahren gestatten zwar beinahe

jedes praktische Problem anzugreifen und zu lösen, aber als Lösung erhalten wir die Werte der gesuchten Funktion, die nur an diskreten Stellen vorkommen. So eine Form der Lösung erschwert die Analyse der numerischen Ergebnisse.

Die analytischen Näherungsmethoden sind dagegen frei von diesem Nachteil. Bei der Anwendung der analytischen Näherungsmethoden erhält man üblicherweise die Lösung in geschlossener Form, was wesentlich die qualitative Analyse durchzuführen erleichtert. Unabhängig von oben gesagten ist die Lösung in geschlossener Form meist bedeutend leichter zu programmieren, was für numerische Rechnungen besonders vorteilhaft ist.

In letzter Zeit werden für die parabolische Differentialgleichung die Variationsmethoden entwickelt, die von den Technikern mit grossem Interesse aufgenommen wurden und sofort weite Verbreitung fanden.

Das Vorhandensein dieser Arbeiten gestattet es, das Variationsintegral für die erwähnten Fälle aufzuschreiben. Das Lösungsverfahren besteht darin, dass man zuerst die Laplacesche Transformation anwendet. Die Anwendung der Transformation ändert den Typ der Differentialgleichung, es geht nämlich die parabolische Differentialgleichung in die elliptische über. Dieser Kunstgriff ermöglicht das Aufschreiben des Variationsintegrals. Die Lösung des Problems kann nachher mit Hilfe einer der direkten Methoden gefunden werden.

Die bekanntesten Arbeiten, die diesen Rechnungsgang verwendet haben, sind die von [1-4]. Um diesen mittelbaren Schritt d.h., die Transformation zu vermeiden, wird in dieser Abhandlung ein direktes Verfahren vorgeschlagen. Der Vorteil der vorgeschlagenen Methode besteht darin, dass man damit nicht nur lineare, sondern nichtlineare Aufgaben lösen kann.

Die vorgeschlagene Methode nutzt den Satz der begrenzten oder partiellen Variation aus, der zuerst von Rosen [7] formuliert wurde.

Die praktische Anwendung dieser Satzes stösst aber auf recht erhebliche Schwierigkeiten

und zwar wegen der Notwendigkeit eine gewisse Klasse von Funktionen zu finden, welche üblicherweise nur auf dem intuitiven Wege konstruiert werden kann. Bekanntlich ist es besonders schwer, solche Koordinatenfunktion zu finden, wenn sie von mehreren Veränderlichen abhängt. Um diese erwähnte Schwierigkeit zu beseitigen, werden die speziellen Sätze angegeben, die das Aufsuchen der zulässigen Funktionen in strenger, genügend vollständiger Art gestatten. Bevor wir in das Verfahren tiefer eindringen, kann man schon voraus sagen, dass die Gesamtlösung des Problems aus zwei Teillösungen gewonnen sein wird.

Die erste Teillösung kann man gewinnen, indem man nur den elliptischen Teil der Ausgangsdifferentialgleichung betrachtet, die bekanntlich zu dem parabolischen Typ gehört.

Bei dieser Annahme erhält man üblicherweise die Poissonsche Differentialgleichung mit entsprechenden Randbedingungen. Entscheidend für den weiteren Verlauf der Rechnung ist dabei die Tatsache, dass die rechte Seite der erwähnten Differentialgleichung eine Potenzreihe von in der Differentialgleichung vorkommenden Veränderlichen ist. Die Potenzreihe ist so gebildet, dass sie bei jedem Glied der Entwicklung einen zunächst unbestimmten Zahlenfaktor hat. Demzufolge erhält man als Teillösung eine endliche Zahl von Funktionen, wobei die erste Funktion die Lösung der abgesonderten Differentialgleichung ist, die an der rechten Seite eine Konstante hat. (Das erste Glied der Potenzreihe). Diese Funktion erfüllt die gegebenen, (inhomogenen) Randbedingungen. Die nächsten Funktionen dagegen erfüllen die zugehörigen homogenen Randbedingungen. Bildet man nachher eine Linearkombination von diesen Teillösungen und nutzt den Satz der begrenzten Variation aus, dann erhält man ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen für die zuerst unbestimmten Zahlenfaktoren. In besprochenen Problemen d.h., in erzwungener Konvektion sind es Systeme von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung. Derartige Rechnungen liefern uns

dann brauchbare Werte, wenn die Anfangsbedingungen auf spezielle Art erfüllt sind, wie das demnächst gezeigt wird.

Es wird auch gezeigt, dass die nach diesem Verfahren gewonnenen Näherungswerte sehr nahe bei den wohlbekannteren exakten Werten liegen.

Um den Rechnungsgang dieses Verfahrens zu erläutern, sind drei Beispiele durchgerechnet und die gewonnenen Näherungswerte mit den exakten Werten verglichen.

2. MATHEMATISCHE FORMULIERUNG DES PROBLEMS

2.1 Variationsproblem

Im folgenden beschäftigen wir uns ausschliesslich mit konvektiver Wärmeströmung, obwohl das Verfahren auch auf den Fall der nicht stationären Wärmeleitströmung ohne besondere Schwierigkeiten angewandt werden kann. In den Betrachtungen nehmen wir an, dass die Wärmeströmung in einem geradlinigen Kanal stattfindet, wobei das Geschwindigkeitsprofil der fortbewegten Flüssigkeit als angegeben vorausgesetzt ist. Wählt man die Koordinatenachse längs der Stromrichtung, dann ergeben sich die senkrechten Querschnitte als ein abgeschlossener, beschränkter, einfach zusammenhängender Bereich "F" mit "T" als stückweise glatter Randkurve. Die Gesamttrandkurve "Γ" möge aus drei Teilrandkurven bestehen. Jeder dieser drei Randkurven ist eine andere Randbedingung zugeordnet. Ferner soll die Geschwindigkeitsverteilung lediglich durch äussere Umstände bedingt sein, d.h. wir vernachlässigen den Einfluss des Temperaturfeldes auf das Geschwindigkeitsfeld. In der Flüssigkeit besteht eine vom Ort abhängige Wärmequelle mit der Ergiebigkeit Φ je Volumen- und Zeiteinheit.

Die in der Flüssigkeit entstehende stationäre Temperaturverteilung T beschreibt dann die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial}{\partial \eta} \left[ \lambda(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial T}{\partial \eta} \right] + \frac{\partial}{\partial \xi} \left[ \lambda(\xi, \eta, \zeta) \frac{\partial T}{\partial \xi} \right] + \Phi(\xi, \eta, \zeta)$$

$$= c_p \cdot \rho \cdot u(\xi, \eta) \frac{\partial T}{\partial \zeta}. \tag{1.2}$$

Die Randbedingungen können entsprechend der Problemstellung verschiedener Art sein:

$$[T - T_1]_{\Gamma_1} = 0 \tag{2.2}$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + q \right]_{\Gamma_2} = 0 \tag{3.2}$$

$$\left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha(T^m - T_a^m) \right]_{\Gamma_3} = 0. \tag{4.2}$$

Die Anfangstemperaturverteilung ist als bekannte Funktion angegeben. Es ist nämlich:

$$T_0 = T_0(\xi, \eta), \quad \zeta = 0. \tag{5.2}$$

Das beschriebene Problem ist, wie sogleich gezeigt wird, der Variationsaufgabe:

$$\begin{aligned} \mathcal{J} \langle T \rangle \equiv & \int_F \left\{ \frac{\lambda}{2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \Phi \cdot T \right. \\ & \left. + c_p \cdot \rho \cdot u \cdot T \cdot \frac{\partial T}{\partial \zeta} \right\} d\xi \cdot d\eta + \int_{\Gamma_2} q \cdot T \cdot ds \\ & + \int_{\Gamma_3} \alpha \left( \frac{T^{m+1}}{m+1} - T_a^m \cdot T \right) ds = \text{Extremum} \end{aligned} \tag{6.2}$$

gleichwertig. Die Extremalbedingung

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{J} \equiv & \int_F \left\{ \lambda \left[ \frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial \xi} + \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial \eta} \right] - \Phi \cdot \delta T \right. \\ & \left. + c_p \cdot \rho \cdot u \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial \zeta} \cdot T + c_p \cdot \rho \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial \zeta} \cdot \delta T \right\} d\xi \cdot d\eta \\ & + \int_{\Gamma_2} q \cdot \delta T \cdot ds + \int_{\Gamma_3} \alpha [T^m - T_a^m] \delta T \cdot ds = 0 \end{aligned} \tag{7.2}$$

geht bei Berücksichtigung der Greenschen Formel

$$\int_F \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial \eta} + \frac{\partial T}{\partial \xi} \cdot \frac{\partial \delta T}{\partial \xi} \right] d\xi \cdot d\eta$$

$$\begin{aligned}
& + \int_F \left[ \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) \right] d\xi \cdot d\eta \\
& = \int_T \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \delta T \cdot ds \quad (8.2)
\end{aligned}$$

und von

$$\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2 + \Gamma_3$$

in

$$\begin{aligned}
\delta \mathcal{J} \equiv & \int_F \left[ c_p \cdot \rho \cdot u \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right. \\
& \left. - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) - \Phi \right] \delta T \cdot d\xi \cdot d\eta \\
& + \int_{\Gamma_2} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} + q \right] \delta T \cdot ds + \int_{\Gamma_3} \left[ \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right. \\
& \left. + \alpha(T^m - T_a^m) \right] \delta T \cdot ds = 0 \quad (9.2)
\end{aligned}$$

über.\* Um unterschieden zu können, ob eine Extremale wirklich ein Extremum liefert, muss zusätzlich die Legendresche Bedingung erfüllt werden. Im unseren Falle lautet diese Bedingung:

$$\frac{\partial}{\partial T_\xi} \left( \frac{\partial L}{\partial T_\xi} \right) = \lambda > 0, \quad \frac{\partial}{\partial T_\eta} \left( \frac{\partial L}{\partial T_\eta} \right) = \lambda > 0 \quad (10.2)$$

wobei

$$\begin{aligned}
L \equiv & \frac{\lambda}{2} \left[ \left( \frac{\partial T}{\partial \xi} \right)^2 + \left( \frac{\partial T}{\partial \eta} \right)^2 \right] - \Phi \cdot T \\
& + c_p \cdot \rho \cdot u \cdot T \cdot \frac{\partial T}{\partial \xi} \quad (11.2)
\end{aligned}$$

und

$$T_\xi = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad T_\eta = \frac{\partial T}{\partial \eta} \quad \text{bedeuten.}$$

Die Energiegleichung (1.2) ist demnach eine

\* Wie zuvor erwähnt wurde, ist das Variationsintegral begrenzt. Das Variationsintegral erstreckt sich nämlich nur auf die Veränderlichen  $\xi$ ,  $\eta$ , wobei die Veränderliche  $\zeta$  als Parameter anzusehen ist. Daraus ergibt sich unmittelbar:

$$\frac{\partial(\delta T)_{\zeta=\text{const}}}{\partial \zeta} = 0.$$

Eulersche Differentialgleichung und die restlichen Bedingungen sind die Randbedingungen des Variationsproblems (6.2). Zur Lösung sind alle stetigen, mit stetigen partiellen Ableitungen bis zur zweiten Ordnung einschliesslich versehenen Funktionen zugelassen, die auf dem Rande "F" des Bereiches "F" der ersten Randbedingung genügen. Natürlich wird man Randbedingungen, die sich ohne weiteres durch die Ansatzfunktion erfüllen lassen, zur Vereinfachung der Rechnung bereits im Ansatz berücksichtigen.

### 3. KONSTRUKTION DER NÄHERUNGSFUNKTION

#### 3.1 Teillösung des Problems

Um eine effektive Lösung von Gleichung [6] gewinnen zu können, muss eine gewisse Folge von Ansatzfunktionen gefunden werden, die wenigstens teilweise den zugeordneten Randbedingungen genügen. Wie zuvor erwähnt wurde, stösst das Aufsuchen dieser Folge von Ansatzfunktionen auf Schwierigkeiten und verläuft üblicherweise auf intuitivem Wege. Um diesen Weg auszuschneiden, werden nun die Annahmen getroffen, die das Aufsuchen der Ansatzfunktionen mit der für den Praktiker nötigen Vollständigkeit gestatten. Zu diesem Zweck wird unsere Betrachtung nur auf den elliptischen Teil der Ausgangsdifferentialgleichung (1.2) beschränkt. Unter Berücksichtigung des vorhergesagten erhält man die Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) + \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial T}{\partial \eta} \right) = F(\xi, \eta). \quad (1.3)$$

Die entsprechenden Randbedingungen bleiben dieselben wie in (2.2), (3.2), (4.2). Die Veränderliche  $\zeta$  tritt hier lediglich als Parameter auf. Die rechte Seite der Differentialgleichung (1.3) ist eine Potenzreihe von in der Differentialgleichung vorkommenden Veränderlichen. Im betrachteten Fall lässt sich die Funktion  $F(\xi, \eta)$  folgendermassen schreiben:

$$F(\xi, \eta) = \sum_{m,n=0}^N A_{m,n} \cdot \xi^m \cdot \eta^n \quad (2.3)$$

$$[m, n = 0, 1, 2, \dots, N]$$

wobei  $A_{m,n}$  noch zu bestimmende Funktionen von  $\zeta$  sind, die bei der Auflösung der Differentialgleichung (1.3) als konstant angenommen sind. Im weiteren Verlauf der Rechnung bildet man eine Folge von Teillösungen der Differentialgleichung (1.3), wobei die erste Lösung mit  $F(\xi, \eta) = A_{00}$  und Randbedingungen (2.2), (3.2), (4.2) ermittelt ist.

Die nächsten Teillösungen erhält man, indem man die weiteren Glieder der Potenzreihe berücksichtigt, wobei die Randbedingungen in diesem Falle als homogen angenommen sind, d.h.:

$$T \Big|_{r_1} = 0, \quad \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r_2} = \lambda \frac{\partial T}{\partial n} \Big|_{r_3} = 0. \quad (3.3)$$

In vielen Fällen gelingt es, die exakte Lösung der Differentialgleichung (1.3) zu gewinnen. Die Lösungen so gestellter Aufgaben sogar für komplizierte Berandungen liegen in der Literatur bereits vor.

Wir gehen jetzt zur Untersuchung des Neumannschen Problems über, welches gewisse Besonderheiten im Vergleich zu den anderen Problemen hat. Die oben erwähnten Besonderheiten des Neumannschen Problems ergeben sich von selbst aus dem Lösungsgang. Schreiben wir nämlich die Differentialgleichung (1.3):

$$\operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) = K \text{ (idem)} \quad (4.3)$$

dann ergibt sich nach der Berücksichtigung des Gauss-Ostrogradsky Satzes:

$$\int_F \operatorname{div}(\lambda \cdot \operatorname{grad} T) \cdot dF = \int_S \lambda \cdot \operatorname{grad} T \cdot ds \quad (5.3)$$

und schliesslich

$$\int_F K \cdot dF = \int_S \lambda \cdot \operatorname{grad} T \cdot ds. \quad (6.3)$$

Wenn  $\lambda \cdot \operatorname{grad} T$  als gewisse Funktion auf der Berandung angegeben ist

$$\lambda \operatorname{grad} T \Big|_S = q(s) \quad (7.3)$$

dann erhält man folgende Abhängigkeit

$$\lambda \operatorname{grad} T = q(s) \quad (8.3)$$

Man sieht aus der Gl. (4.3), dass die Konstante  $K$  in diesem Falle nicht willkürlich gewählt sein kann. Berücksichtigt man dagegen die weiteren Glieder der Potenzreihe und die homogenen Randbedingungen, dann erhält man die zusätzlichen Abhängigkeiten, welche die Zahl der in der Potenzreihe vorkommenden Konstanten zu reduzieren gestatten.

### 3.2 Gesamtlösung des Problems

Sind die Teillösungen des Problems vorhanden, dann lässt sich die Gesamtlösung als eine Linearkombination folgendermassen darstellen

$$\tilde{T} = \Theta_0(\xi, \eta, \zeta) + \sum_1^n A_i(\zeta) \varphi_i(\xi, \eta) \quad (9.3)$$

$$[i = 1, 2, \dots, n].$$

Wie zuvor erwähnt wurde, stellt der erste Ausdruck eine Lösung der Differentialgleichung (1.3) mit inhomogenen Randbedingungen dar, die an der rechten Seite eine Konstante hat.

Der zweite Ausdruck dagegen, der aus den nächsten Lösungen der geänderten Differentialgleichung besteht, erfüllt die zugehörigen homogenen Randbedingungen. Nach der Anwendung der begrenzten Variation erhält man für die Bestimmung von  $A_i$  ein System von gewöhnlichen Differentialgleichungen erster Ordnung

$$\int_F \left[ c_p \cdot \rho \cdot u \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \zeta} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left( \lambda \cdot \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \xi} \right) - \frac{\partial}{\partial \eta} \left( \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} \right) - \Phi \right] \delta \tilde{T}_i \cdot d\xi \cdot d\eta + \int_{r_2} \left[ \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} + q \right] \delta T_i \, ds + \int_{r_3} \left[ \lambda \frac{\partial \tilde{T}}{\partial \eta} + \alpha(T^m - T_a^m) \right] \delta T_i \, ds = 0 \quad (10.3)$$

$$\text{wobei } \delta \tilde{T}_i = \frac{\partial \tilde{T}}{\partial A_i} \delta A_i.$$

Diesem System von gewöhnlichen Differentialgleichungen sind gewisse Konstanten zugeordnet, die den Anfangswerten entsprechen. Diese Anfangswerte hängen von der Anfangs-

bedingung (5.2) ab und werden auf eine ganz spezielle Art ermittelt.

3.3 Erfüllung der Anfangsbedingung

Gegeben sei unsere Näherungsfunktion an der Stelle  $\zeta = 0$ , die eine endliche Linearkombination von  $N + 1$  Funktionen darstellt

$$\tilde{T} = \tilde{T}[\xi, \eta, A_0(0), A_2(0), \dots, A_N(0)] \quad (11.3)$$

$[i = 0, 1, 2, \dots, N]$

wobei  $A_i(0)$  vorläufig noch unbestimmte Koeffizienten sind, die gesuchten Anfangswerte darstellen.

Dann ist die Abweichung der Näherungsfunktion  $\tilde{T}$  von  $T_0(\xi, \eta)$  durch

$$\varepsilon(\xi, \eta) = T_0 - \tilde{T}. \quad (12.3)$$

Als beste Näherungswerte werden diejenigen angesehen, die das über den ganzen Bereich "F" erstreckte Abweichungsquadrat zu einem Minimum machen.

$$\int_F [T_0(\xi, \eta) - \tilde{T}(\xi, \eta) A_0(0), A_2(0), \dots, A_N(0)]^2 d\xi \cdot d\eta = \text{Minimum}. \quad (13.3)$$

Aus der Minimalforderung (13.3) können wir die Konstanten  $A_i(0)$  bestimmen. Diese verlangt, dass die partiellen Ableitungen nach  $A_i(0)$  verschwinden. Daraus ergeben sich  $N + 1$  lineare inhomogene Gleichungen zur Bestimmung der  $N + 1$  bisher unbekanntes  $A_i(0)$ . Die aus der Minimalbedingung gewonnenen Gleichungen bezeichnet man als Normalgleichungen. Oft bedient man sich für die in diesen Gleichungen auftretenden Integralen einer kürzeren Schreibweise, indem man

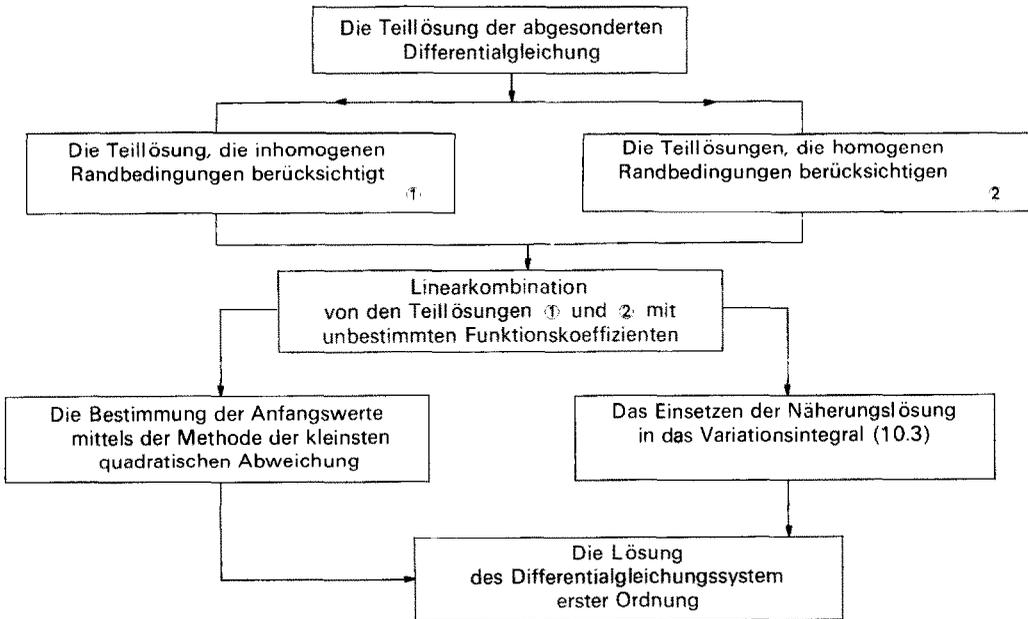
$$\int_F T_0 \cdot \tilde{T}_r \cdot d\xi \cdot d\eta = [T_0, \tilde{T}_r], \int_F \tilde{T}_r^2 \cdot d\xi \cdot d\eta = [\tilde{T}_r, \tilde{T}_r], \int_F \tilde{T}_r \cdot \tilde{T}_s \cdot d\xi \cdot d\eta = [\tilde{T}_r, \tilde{T}_s] \quad (14.3)$$

$[r, s = 0, 1, 2, \dots, N]$

einsetzt. Die Normalgleichungen erhalten damit die Form:

$$A_0(0)[T_0, \tilde{T}_0] + A_1(0)[T_0, \tilde{T}_1] + \dots + A_N(0)[\tilde{T}_0, \tilde{T}_N] = [T_0, \tilde{T}_0]$$

$$A_0(0)[\tilde{T}_1, T_0] + A_2(0)[\tilde{T}_1, \tilde{T}_1]$$



$$\begin{aligned}
 & + \dots A_N(0)[\tilde{T}_1, \tilde{T}_N] = [T_0, \tilde{T}_1] \\
 A_0(0)[\tilde{T}_N, \tilde{T}_0] & + A_2(0)[\tilde{T}_N, \tilde{T}_1] \\
 & + \dots A_N(0)[\tilde{T}_N, \tilde{T}_N] = [T_0, \tilde{T}_N]
 \end{aligned}
 \tag{15.3}$$

4. RECHNERISCHES VORGEHEN

Um das rechnerische Vorgehen anschaulicher darzustellen, ist ein Diagramm angegeben. Daraus ist unmittelbar ersichtlich, wie die Rechnung verläuft.

5. ANWENDUNGSBEISPIELE

Dieser Abschnitt behandelt zahlenmässig einen nichtstationären Wärmeleitvorgang und zwei Wärmeströmungsaufgaben für erzwungene Konvektion. Im folgenden wird für alle Probleme vorausgesetzt, dass die Stoffwerte temperaturunabhängig sind.

5.1 Berechnung der Temperaturverteilung in einer unendlich ausgedehnten Platte

Die Differentialgleichung für den betrachteten Fall lautet

$$\kappa \frac{\partial^2 \vartheta}{\partial x^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau} = 0
 \tag{1.5}$$

dabei ist  $\vartheta = \frac{T}{T_1}$ .

Die Randbedingungen für diese Aufgabe seien nun:

$$\left. \frac{\partial \vartheta}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \vartheta \Big|_{x=\delta} = 1.
 \tag{2.5}$$

Die Anfangsbedingung lautet dagegen:

$$\vartheta(x,0) = 0, \quad 0 \leq x \leq \delta, \quad \tau = 0.
 \tag{3.5}$$

Wendet man den im Abschnitt 3 beschriebenen Rechnungsgang an, dann erhält man die Differentialgleichung des Teilproblems

$$\frac{d^2 \vartheta_0}{dx^2} = A_0
 \tag{4.5}$$

mit den Randbedingungen (2.5). Nach zwei-

maliger Integration und Berücksichtigung der Randbedingungen erhält man die erste Teillösung

$$\tilde{\vartheta}_0 = \frac{A_0 \delta^2}{2} \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 - 1 \right] + 1.
 \tag{5.5}$$

Die nächste Teillösung ergibt sich aus der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 \vartheta_1}{dx^2} = A_1 x + B_1
 \tag{6.5}$$

mit Randbedingungen

$$\left. \frac{\partial \vartheta_1}{\partial x} \right|_{x=0} = 0, \quad \vartheta_1 \Big|_{x=\delta} = 0.$$

Für die oben geschriebenen Randbedingungen lautet die zweite Teillösung

$$\tilde{\vartheta}_1 = \frac{A_1 \delta^3}{6} \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 - 1 \right] + \frac{B_1 \delta^2}{2} \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 - 1 \right].
 \tag{7.5}$$

Da die Ausdrücke mit Funktionskoeffizienten  $A_0$  und  $B_1$  dieselbe Form haben, kann man deswegen die Linearkombination folgendermassen darstellen

$$\tilde{\vartheta} = 1 + A_0 \delta^2 \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 - 1 \right] + A_1 \delta^3 \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 - 1 \right]
 \tag{8.5}$$

Die Anfangswerte berechnet man mit Hilfe der Gl. (13.3). Aus der Anfangsbedingung  $\vartheta(x,0) = 0$  folgt

$$\int_0^\delta \left\{ 1 + A_0(0) \cdot \delta^2 \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^2 - 1 \right] + A_1(0) \cdot \delta^3 \left[ \left( \frac{x}{\delta} \right)^3 - 1 \right] \right\}^2 \cdot dx = \text{Minimum}.
 \tag{9.5}$$

Nach der Durchführung der Rechnung ergibt sich

$$A_0(0) = -\frac{3,4608}{\delta^2}, \quad A_1(0) = \frac{4,30719}{\delta^3}.
 \tag{10.5}$$

Setzt man nun die Gesamtlösung (8.5) in Gl. (10.3) ein und führt die Integration durch, dann

erhält man folgendes Differentialgleichungssystem

$$\begin{aligned} -\frac{4}{3}\kappa \cdot A_0 - \frac{3}{2}\kappa \cdot \delta \cdot A_1 - \frac{8}{15}\delta^2 \cdot \dot{A}_0 - \frac{7}{12}\delta^3 \cdot \dot{A}_1 &= 0 \\ -\frac{3}{2}\kappa \cdot A_0 - \frac{9}{5}\kappa \cdot \delta \cdot A_1 - \frac{7}{12}\delta^2 \cdot \dot{A}_0 - \frac{9}{14}\delta^3 \cdot \dot{A}_1 &= 0 \end{aligned} \quad (11.5)$$

Dabei ist  $\dot{A}_0 = \frac{dA_0}{d\tau}$

$\dot{A}_1 = \frac{dA_1}{d\tau}$

Nach der Lösung dieses Systems ergeben sich die Beziehungen für Funktionskoeffizienten

$$\begin{aligned} A_0 &= \frac{1,5830}{\delta^2} \cdot e^{-2,2713\pi} - \frac{5,0438}{\delta^2} \cdot e^{-25,6054\pi} \\ A_1 &= \frac{0,7847}{\delta^3} \cdot e^{-2,5714\pi} - \frac{1,1034}{\delta^3} \\ &\quad \times e^{-2,713\pi} + \frac{4,6259}{\delta^3} \cdot e^{-25,605\pi} \end{aligned} \quad (12.5)$$

Dabei bedeutet  $\pi = \frac{\kappa\tau}{\delta^2}$ .

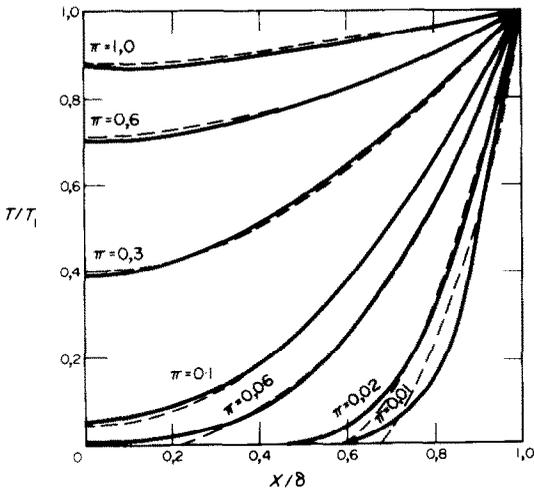


BILD 1. Die Temperaturverteilung in ebener Platte.

Die Ergebnisse der Näherungslösung sind mit exakten Werten verglichen und im Bild 1 dargestellt.

5.2 Erzwungene Konvektion in einem geradlinigen Kanal von rechteckigem Querschnitt (Bild 2)

Der Temperaturverlauf infolge der erzwungenen Konvektion in einem geradlinigen Kanal von rechteckigem Querschnitt beschreibt folgende Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \eta^2} - Pe \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 0. \quad (13.5)$$

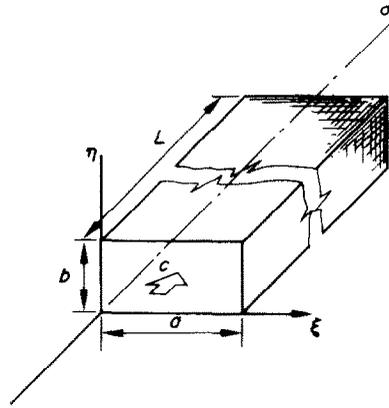


BILD 2. Die Geometrie des Kanals.

In den Betrachtungen ist vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeit überall konstant ist. Die entsprechenden Randbedingungen im betrachteten Fall sind

$$\begin{aligned} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=0} = 0 \\ \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=a} &= \frac{\partial \Theta}{\partial \eta} \Big|_{\eta=b} = q \cdot f(\zeta). \end{aligned} \quad (14.5)$$

Wir bemerken, dass in der Gl. (14.5) die Länge der Rechteckseiten mit  $a$  und  $b$  bezeichnet wurden.

Die Anfangsbedingung lautet dagegen

$$\Theta_0 = 0, \quad 0 \leq \xi \leq a, \quad 0 \leq \eta \leq b, \quad \zeta = 0. \quad (15.5)$$

Die Differentialgleichung des ersten Teilproblems ist

$$\frac{\partial^2 \Theta_{00}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{00}}{\partial \eta^2} = A_{00}. \quad (16.5)$$

Die Randbedingungen bleiben dieselben wie in Gl. (14.5). Da wir in diesem Falle mit dem Neumannschen Problem zu tun haben, müssen zusätzliche Bedingungen erfüllt werden. Es ist nämlich

$$\int_S \frac{\partial \Theta}{\partial n} \cdot ds = A_{00} \int_F \cdot dF. \quad (17.5)$$

Es gilt dann die folgende Beziehung:

$$q \cdot f(\zeta) \cdot \int_0^a d\xi + q \cdot f(\zeta) \cdot \int_0^b d\eta = A_{00} \int_0^a \int_0^b d\xi \cdot d\eta \quad (18.5)$$

und schliesslich

$$A_{00} = q \cdot f(\zeta) \cdot \left[ \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right]. \quad (19.5)$$

Die Teillösung der Gl. (16.5) lässt sich folgendermassen schreiben

$$\Theta_{00} = \frac{q \cdot f(\zeta)}{2} \left( \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} \right) + A_0 \quad (20.5)$$

Dabei ist  $A_0$  eine willkürliche Konstante. Die nächste Teillösung kann man finden, indem man die weiteren Glieder der Potenzreihe in der Differentialgleichung berücksichtigt

$$\frac{\partial^2 \Theta_{11}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \Theta_{11}}{\partial \eta^2} = A_{11} \cdot \xi + B_{11} \cdot \eta + C_{11}. \quad (21.5)$$

Die Randbedingungen sind in diesem Falle homogen, d.h.:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial n} \right|_S = 0. \quad (22.5)$$

Schreibt man die rechte Seite der Gl. (21.5) in die Form um

$$\frac{A_{11}}{C_{11}} \cdot \xi + \frac{B_{11}}{C_{11}} \eta + 1 = A_1 \xi + B_1 \eta + 1 \quad (23.5)$$

dann ergibt sich aus der Beziehung (22.5) und (23.5) folgende Abhängigkeit

$$A_{11} \cdot \xi + B_{11} + C_{11} = A_1 \left[ \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} - 1 \right] \quad (24.5)$$

Die letzte Abhängigkeit erfüllt, wie das leicht nachzuprüfen ist, die Bedingung

$$\int_S \frac{\partial \Theta}{\partial n} \cdot ds = A_1 \int_0^a \int_0^b \left[ \frac{\xi}{a} + \frac{\eta}{b} - 1 \right] \cdot d\xi \cdot d\eta = 0.$$

Nach Ausführung der notwendigen Rechnungen lässt sich die zweite Teillösung folgendermassen darstellen

$$\Theta_{11}(\xi, \eta) = \frac{A_1(\zeta)}{2} \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) + \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right] \quad (25.5)$$

und schliesslich als angenäherte Gesamtlösung erhält man

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(\xi, \eta, \zeta) &= \frac{q \cdot f(\zeta)}{2} \left( \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} \right) + A_0(\zeta) \\ &+ \frac{A_1(\zeta)}{2} \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) + \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (26.5)$$

Nach Einführung kürzerer Schreibweise

$$L[\tilde{\Theta}] \equiv \frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \tilde{\Theta}}{\partial \eta^2} - Pe \cdot \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \zeta}$$

lässt sich die Gl. (10.3) folgenderweise darstellen

$$\int_0^a \int_0^b L[\tilde{\Theta}] \cdot \delta \tilde{\Theta}_i \cdot d\xi \cdot d\eta = 0. \quad (27.5)$$

Dabei gelten für  $\delta \tilde{\Theta}_i$  folgende Beziehungen

$$\begin{aligned} \delta \tilde{\Theta}_0 &= \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial A_0} \cdot \delta A_0, \quad \delta \tilde{\Theta}_1 \equiv \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial A_1} \cdot \delta A_1 \\ &= \frac{1}{2} \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) + \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right] \cdot \delta A_1. \end{aligned}$$

Setzt man nun (26.5) in (27.5) ein und führt die notwendige Integration durch, dann erhält man ein Differentialgleichungssystem zur Bestimmung der Funktionskoeffizienten  $A_0(\zeta)$  und  $A_1(\zeta)$ .

Die Anfangswerte berechnet man mit Hilfe der Gl. (13.3). Aus der Anfangsbedingung  $\Theta_0 = 0$  folgt

$$\begin{aligned}
 A_0(0) \int_0^a \int_0^b d\xi \cdot d\eta + \frac{q}{2} \cdot f(0) \cdot \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} \right) d\xi \cdot d\eta & - q \cdot f(\zeta) \frac{(a+b)}{12} \cdot (a^2 + b^2) - A_1(\zeta) \frac{ab}{60} (a^2 + b^2) \\
 \times d\eta + \frac{A_1(0)}{2} \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) & - Pe \left\{ -\frac{q}{2} \cdot f(\zeta) \left[ \frac{a^2 b^2}{36} \cdot (a+b) \right. \right. \right. \\
 + \left. \left. \left. \frac{2ab}{45} (b^3 + a^3) \right] + -\dot{A}_0(\zeta) \frac{ab}{12} (a^2 + b^2) \right. \right. & + \left. \left. \left. \frac{\dot{A}_1(\zeta)}{2} \left[ \frac{13a^5 \cdot b}{1260} + \frac{13b^5 a}{1260} + \frac{a^3 b^3}{72} \right] \right\} = 0. \right. \\
 + \left. \left. \left. \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right] \cdot d\xi \cdot d\eta = 0 \right. & \quad (28.5)
 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
 A_0(0) \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) + \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right] \cdot d\xi \cdot d\eta & \quad (33.5) \\
 + \frac{q}{2} \cdot f(0) \int_0^a \int_0^b \left( \frac{\xi^2}{a} + \frac{\eta^2}{b} \right) \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) & \quad \text{Dabei sind } \dot{A}_0 = \frac{dA_0}{d\zeta} \\
 + \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right] \cdot d\xi \cdot d\eta + \frac{A_1(0)}{2} \cdot & \quad \dot{A}_1 = \frac{dA_1}{d\zeta} \\
 \int_0^a \int_0^b \left[ \left( \frac{\xi^3}{3a} - \frac{\xi^2}{2} \right) + \left( \frac{\eta^3}{3b} - \frac{\eta^2}{2} \right) \right]^2 & \quad f(\zeta) = \frac{df}{d\zeta}. \\
 \times d\xi \cdot d\eta = 0. & \quad (29.5)
 \end{aligned}$$

Nach Durchführung der Rechnung ergibt sich

$$A_0(0) = \frac{q \cdot f(0)}{2} \left[ \frac{7}{17} \cdot \frac{(b^3 + a^3)(a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4)} - \frac{(a+b)}{3} \right] \quad (30.5)$$

$$A_1(0) = q \cdot f(0) \cdot \frac{84}{17} \cdot \frac{(b^3 + a^3)}{a^4 + b^4}. \quad (31.5)$$

Das Differentialgleichungssystem erster Ordnung lautet

$$\begin{aligned}
 q \cdot f(\zeta) \cdot (a+b) - Pe \left\{ q \cdot f(\zeta) \cdot \frac{ab}{6} (a+b) \right. & \\
 + \left. \dot{A}_0(\zeta) \cdot ab - \dot{A}_1(\zeta) \cdot \frac{ab}{24} (a^2 + b^2) \right\} = 0 & \quad (32.5)
 \end{aligned}$$

Nach der Lösung dieses Systems ergeben sich die Beziehungen für die Funktionskoeffizienten in der Form

$$\begin{aligned}
 \frac{A_0(\zeta)}{q} = \frac{(a+b)}{ab \cdot Pe} \cdot \int_0^\zeta f(\zeta) \cdot d\zeta - \frac{(a+b)}{6} & \\
 \times f(\zeta) + \frac{A_1(\zeta)}{q} \cdot \frac{(a^2 + b^2)}{24} + C_0 & \quad (34.5)
 \end{aligned}$$

$$\frac{A_1(\zeta)}{q} = e^{-M\zeta} \cdot \left[ C_1 + N \cdot \int \frac{df}{d\zeta} \cdot e^{M\zeta} \cdot d\zeta \right] \quad (35.5)$$

$$\text{Dabei bedeutet } M = \frac{168}{17Pe} \cdot \frac{(a^2 + b^2)}{(a^4 + b^4)}$$

$$N = \frac{84}{17} \cdot \frac{(a^3 + b^3)}{(a^4 + b^4)}.$$

Sind die Anfangswerte  $A_0(0)$  und  $A_1(0)$  vorhanden, dann lassen sich auch die Konstanten  $C_0$  und  $C_1$  ohne besondere Schwierigkeiten bestimmen.

Zur numerischen Rechnung ist angenommen, dass die Funktion  $f(\zeta)$  folgende Form hat

$$f(\zeta) = \sin\left(\frac{\pi\zeta}{L}\right).$$

Bei dieser Annahme ergibt sich

$$\frac{A_0(\zeta)}{q} = \frac{(a+b) \cdot L}{Peab} \cdot \pi \left[ 1 - \cos\left(\frac{\pi\zeta}{L}\right) \right] - \frac{(a+b)}{6} \sin\left(\frac{\pi\zeta}{L}\right) + \frac{A_1(\zeta)}{q} \frac{(a^2 + b^2)}{24} \quad (36.5)$$

$$\frac{A_1(\zeta)}{q} = \frac{N}{\left[\left(\frac{ML}{\pi}\right)^2 + 1\right]} \cdot \left[ \frac{ML}{\pi} \cos\left(\frac{\pi\zeta}{L}\right) + \sin\left(\frac{\pi\zeta}{L}\right) - \frac{ML}{\pi} \cdot e^{-M\zeta} \right] \quad (37.5)$$

Tabelle 1

$D_i = \frac{Pe \cdot \kappa}{C}$	$a = \frac{h}{D_i}$	$b = \frac{k}{D_i}$	$L = \frac{H}{D_i}$	$Pe = \frac{D_i \cdot C}{\kappa}$
22 [mm]	0,750	0,350	50	1000

Die unten folgenden Tabellen 2 und 3 gestatten es, die exakten Werte der Temperatur an den Stellen  $\xi = \eta = 0$  und  $\xi = a, \eta = b$  mit ihren Näherungswerten zu vergleichen.

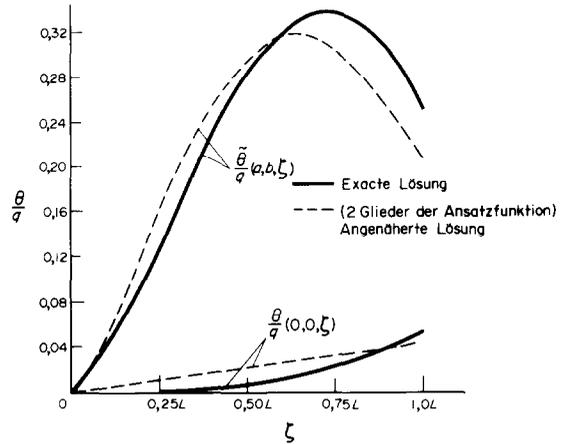


BILD 3. Die Temperaturverteilung im Kanal von rechteckigem Querschnitt.

Tabelle 2  
Pe = 1000

$\zeta$	$\frac{A_0(\zeta)}{q}$		$\frac{A_1(\zeta)}{q}$		$\tilde{\Theta}(a, b, \zeta)$	$\Theta(a, b, \zeta)$	$\tilde{\Theta}(0, 0, \zeta)$	$\Theta(0, 0, \zeta)$
	genau		genau		genau	genau	genau	genau
1	0,0	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	$\frac{1}{4}L$	0,0124	4,3155	0,1572	0,12304	0,0124	0,00026	
3	$\frac{1}{2}L$	0,0243	5,0581	0,2904	0,27830	0,0243	0,0064	
4	$\frac{3}{4}L$	0,0300	3,9348	0,3191	0,32535	0,0300	0,01414	
5	$\frac{1}{8}L$	0,0355	2,0306	0,3042	0,33856	0,0355	0,0249	
6	$\frac{3}{8}L$	0,0405	-0,3442	0,2760	0,31469	0,0405	0,0377	
7	$\frac{5}{8}L$	0,0449	-2,8084	0,2095	0,25654	0,0449	0,05118	

Tabelle 3  
Pe = 100

$\zeta$	$\tilde{\Theta}(a, b, \zeta)$		$\Theta(a, b, \zeta)$		$\tilde{\Theta}(0, 0, \zeta)$		$\Theta(0, 0, \zeta)$	
	genau		genau		genau		genau	
1	0,00	0,00	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000	0,000
2	$\frac{1}{4}L$	0,4035	0,4069	0,1020	0,0935	0,4035	0,0935	
3	$\frac{1}{2}L$	0,9948	0,9947	0,4662	0,4663	0,9948	0,4663	
4	$\frac{3}{4}L$	1,2329	1,2313	0,7014	0,7052	1,2329	0,7052	
5	$\frac{1}{8}L$	1,38802	1,3776	0,9262	0,9339	1,38802	0,9339	
6	$\frac{3}{8}L$	1,4145	1,4106	1,1074	1,1177	1,4145	1,1177	
7	$L$	1,3305	1,3269	1,2168	1,2276	1,3305	1,2276	

In der Tabelle 1 sind die Werte der in der Rechnung vorkommenden Kenngrößen wie z.B.: Pe, a, b, usw. eingetragen.

Bild 3 stellt den exakt und näherungsweise berechneten Temperaturverlauf dar.

5.3 Erzwungene Konvektion in einem geradlinigen Kanal von kreisförmigen Querschnitt

Als drittes Beispiel betrachten wir erzwungene Konvektion in einem geradlinigen Kanal von kreisförmigem Querschnitt. Den Radius des Kreises nehmen wir als Eins an. Die

Differentialgleichung für dieses Problem lautet

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial \rho} \cdot \left( \rho \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \right) - \frac{Pe}{2} \cdot \frac{\partial \Theta}{\partial \zeta} = 0. \quad (38.5)$$

In den Betrachtungen ist vorausgesetzt, dass die Geschwindigkeit der Flüssigkeit überall konstant ist. Die entsprechenden Randbedingungen sind

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=0} = 0, \quad \left. \frac{\partial \Theta}{\partial \rho} \right|_{\rho=1} = q \cdot f(\zeta). \quad (39.5)$$

Die Anfangsbedingung lautet dagegen

$$\Theta_0(\rho, 0) = 0, \quad 0 \leq \rho \leq 1, \quad \zeta = 0. \quad (40.5)$$

Die Differentialgleichung des ersten Teilproblem ist

$$\frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \cdot \left( \rho \cdot \frac{d\Theta_1}{d\rho} \right) = A_1. \quad (41.5)$$

Die Randbedingungen bleiben dieselben wie in (39.5). Da wir in diesem Falle mit dem Neumannschen Problem zu tun haben, müssen zusätzliche Bedingungen erfüllt werden

$$\int_s \frac{\partial \Theta}{\partial n} \cdot ds = \int_F A_1 \cdot dF \quad (42.5)$$

oder

$$q \cdot f(\zeta) \int_0^{2\pi} d\varphi = A_1 \int_0^1 \int_0^{2\pi} \rho \cdot d\rho \cdot d\varphi$$

Daraus

$$A_1 = 2q \cdot f(\zeta). \quad (43.5)$$

Nutzt man die zuletzt angegebenen Beziehungen aus, dann lässt sich die Teillösung folgendermassen schreiben

$$\Theta_1(\rho, \zeta) = q \cdot f(\zeta) \frac{\rho^2}{2} + B_1 \quad (44.5)$$

Dabei ist  $B_1$  eine willkürliche Konstante.

Die zweite Teillösung kann man finden, in dem man den linearen Anteil der Potenzreihe an der rechten Seite der Differentialgleichung berücksichtigt

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left( \rho \cdot \frac{d\Theta_2}{d\rho} \right) = A_2 \cdot \rho + B_2. \quad (45.5)$$

Aus der Bedingung, die für das Neumannsche Problem gilt, geht hervor, dass

$$A_2 \int_0^1 \rho_2 \cdot d\rho + B_2 \int_0^1 \rho \cdot d\rho = 0 \quad (46.5)$$

und schliesslich

$$A_2 \cdot \rho + B_2 = B_2 \left( \frac{3}{2} \rho - 1 \right). \quad (47.5)$$

Setzt man (47.5) in (45.5) ein, dann erhält man nach der Integration die zweite Teillösung

$$\Theta_2 = B_2 \left( \frac{\rho^3}{6} - \frac{\rho^2}{4} \right). \quad (48.5)$$

Entsprechendes gilt für das dritte Teilproblem, wobei die Differentialgleichung in diesem Fall lautet

$$\frac{1}{\rho} \cdot \frac{d}{d\rho} \left( \rho \cdot \frac{d\Theta_3}{d\rho} \right) = A_3 \rho^2 + C_3 \rho + B_3. \quad (49.5)$$

Die dritte Teillösung erhält man in der Form

$$\Theta_3 = B_3 \left( \frac{\rho^4}{16} + \frac{\rho^3}{12} - \frac{\rho^2}{4} \right). \quad (50.5)$$

Die Einzelheiten der Rechnung unterdrücken wir.

Die angenäherte Gesamtlösung erhält man als eine lineare Kombination in der Form

$$\begin{aligned} \tilde{\Theta}(\rho, \zeta) = & B_1(\zeta) + qf(\zeta) \frac{\rho^2}{2} + B_2(\zeta) \left( \frac{\rho^3}{6} - \frac{\rho^2}{4} \right) \\ & + B_3(\zeta) \left( \frac{\rho^4}{16} + \frac{\rho^3}{12} - \frac{\rho^2}{4} \right). \end{aligned} \quad (51.5)$$

Nach Einführung einer kürzeren Schreibweise

$$L[\tilde{\Theta}] \equiv \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left( \rho \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \rho} \right) - \frac{Pe}{2} \cdot \frac{\partial \tilde{\Theta}}{\partial \zeta}$$

lässt sich die Gl. (10.3) folgenderweise darstellen

$$\int_0^1 L[\tilde{\Theta}] \delta \tilde{\Theta}_i \cdot \rho \cdot d\rho = 0 \quad [i = 1, 2, 3]. \quad (52.5)$$

Die weiteren Rechnungen verlaufen wie unter Punkt (5.2) und führen auf ein Differentialgleichungssystem, das aus drei Differentialgleichungen erster Ordnung besteht. Nach der Lösung dieses Systems ergeben sich die Beziehungen für Funktionskoeffizienten  $B_1(\zeta)$ ,  $B_2(\zeta)$ ,  $B_3(\zeta)$ . Zur numerischen Rechnung ist angenommen, dass die Funktion  $f(\zeta)$  folgende Form hat

$$f(\zeta) = \sin\left(\frac{\pi\zeta}{L}\right).$$

Die Tabelle 5 gestattet es, die exakten Werte der Temperatur an den Stellen  $\tilde{\Theta}(0, \zeta)$  und

Tabelle 4

$D_t = \frac{Pe \cdot \nu}{C}$	$L = \frac{H}{R_t}$	$R_t = \frac{D_t}{2}$	$Pe = \frac{D_t \cdot C}{\nu}$
22 [mm]	100	11 [mm]	1000

$\tilde{\Theta}(1, \zeta)$  mit ihren Näherungswerten zu vergleichen. Die numerische Rechnung wurde bei ein-, zwei- und dreigliedrigem Ansatz für die Gesamtlösung durchgeführt.

In der Tabelle 4 sind die Werte der in der Rechnung vorkommenden Kenngrößen eingetragen. Bild 4 stellt den exakt und näherungsweise berechneten Temperaturverlauf dar.

6. SCHLUSSBEMERKUNGEN

In der vorliegenden Arbeit hat man nachge-

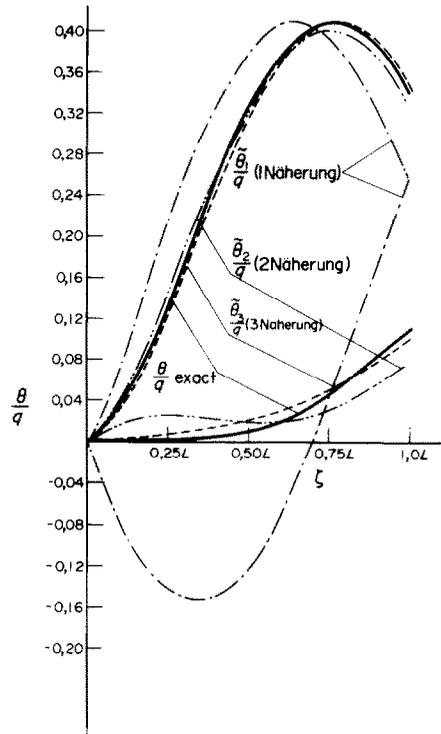


BILD 4. Die Temperaturverteilung im Kanal von kreisförmigem Querschnitt.

wissen, dass die partielle Differentialgleichung vom parabolischen Typ mit entsprechenden Randbedingungen auf ein Minimalproblem zurückgeführt werden kann.

Die neue Auffassung des Variationsproblems ermöglicht das unmittelbare Aufschreiben des

Tabelle 5  
Pe = 1000

$\zeta$	$\tilde{\Theta}_1(1, \zeta)$	$\tilde{\Theta}(0, \zeta)$	$\tilde{\Theta}_2(1, \zeta)$	$\tilde{\Theta}_2(0, \zeta)$	$\tilde{\Theta}_3(1, \zeta)$	$\tilde{\Theta}_3(0, \zeta)$	$\Theta(1, \zeta)$	$\Theta(0, \zeta)$	
	q	q	q	q	q	q	q	q	
	1. Näherung		2. Näherung		3. Näherung		genau		
1	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	
2	$\frac{1}{4}L$	0,2140	-0,1396	0,1431	0,0259	0,1279	0,0094	0,1344	0,000125
3	$\frac{1}{2}L$	0,3773	-0,1227	0,3169	0,0183	0,3097	0,0219	0,3160	0,0082
4	$\frac{3}{4}L$	0,4070	-0,0550	0,3750	0,0198	0,3747	0,0326	0,3791	0,022
5	$\frac{7}{8}L$	0,3941	0,0405	0,3986	0,0299	0,4057	0,0492	0,4070	0,0443
6	$\frac{15}{16}L$	0,3406	0,1492	0,3833	0,0495	0,3966	0,0719	0,3945	0,0738
7	L	0,2546	0,2546	0,3306	0,0772	0,3482	0,0989	0,3428	0,1078

Variationsintegrals, ohne die Integraltransformation anwenden zu müssen. Beide Methoden nämlich, die mit Hilfe der Transformation sowie die vorgeschlagene sind gleichwertig und führen im Falle der linearen Aufgaben zu denselben Ergebnissen. Der Vorteil der vorgeschlagenen Methode besteht darin, dass man damit nicht nur lineare sondern auch nichtlineare Aufgaben lösen kann. Die Genauigkeit der Methode hängt von der Anzahl der Koordinatenfunktionen im Näherungsansatz ab.

Abschliessend ist festzustellen, dass das vorliegende Verfahren, deren Gültigkeit an drei Beispielen nachgeprüft ist, einerseits hohen Genauigkeitsansprüchen genügt, andererseits aber auch mit vertretbarem Rechenaufwand in der Praxis angewendet werden kann.

Zu besonderem Dank verpflichtet bin ich den Herren Dipl.-Ing. S. Gołos und Dipl.-Math. W. Piczka, die in einigen Beispielen die Rechnung durchgeführt und die Tabellen zusammengestellt haben.

#### LITERATUR

1. J. H. WEINER, A method for the approximate solution

- solution of the heat equation. Wright Air Development Center, Technical Report 54-427 (1955).
2. D. DICKER und M. B. FRIEDMAN, Solution of heat conduction problems with nonseparable domains, American Society of Mechanical Engineers Paper 63-WA-2 (1963).
3. B. KRAJEWSKI, Application of variational methods to problems of unsteady heat flow, *Arch. Mech. Stosow.* **5**, 20 (1968) Poland.
4. P. A. LORETAN, Laplace-variational method to transient multi-dimensional temperature distributions, *Nucl. Engng Design* **11** (1), 27-40 (1969).
5. S. D. SAVKAR, On a variational formulation of a class of thermal entrance problems, *Int. J. Heat Mass Transfer* **13**, 1187-1197 (1970).
6. J. MIKUSINSKI, Operational calculus, *International Series in Pure and Applied Mathematics*, Vol. 8. Pergamon Press, Oxford (1967).
7. P. ROSEN, Use of restricted variational principles for the solution of differential equations, *J. Appl. Phys.* **25**, 336 (1954).
8. B. A. FINLAYSON and L. E. SCRIVEN, On the search for variational principles, *Int. J. Heat Mass Transfer* **10**, 799-821 (1967).
9. M. A. BIOT, New methods in heat flow analysis with application to flight structures, *J. Aeronaut. Sci.* **24**, 857 (1957).
10. M. A. BIOT, Further developments of new methods in heat-flow analysis, *J. Aerospace Sci.* **26**, 367 (1959).
11. M. A. BIOT, Lagrangian thermodynamics of heat transfer in systems including fluid motion, *J. Aerospace Sci.* **29**, 568 (1962).

#### A DIRECT VARIATIONAL METHOD FOR THE TREATMENT OF HEAT TRANSFER PROBLEMS IN FORCED CONVECTION

**Abstract**—A direct variational method is presented for the determination of a temperature field in forced convection.

This method is based on the principle of limited or partial variation first formulated by Rosen. The supplement to this formulation as introduced here satisfies the conditions necessary for the existence of a variational integral. Independently those special conditions are presented which allow the construction of an approximate solution.

The advantage of the proposed method is in the possible solution of both linear and non-linear problems. For demonstration three problems are calculated and approximate solutions are compared to exact values.

#### UNE METHODE VARIATIONNELLE DIRECTE DE TRAITEMENT DE PROBLEME DE CONVECTION THERMIQUE FORCEE

**Résumé**—Le travail présenté a pour but la mise au point d'une méthode à variation directe, destinée à la détermination d'un champ de températures lié au problème du flux convectif de chaleur.

Il est à mentionner l'avantage de la méthode, qui satisfait aux toutes conditions nécessaires liées à l'existence de l'intégrale variationnelle.

Supplémentairement on a aussi déterminé la construction de solutions approchées basées sur le modèle physique et géométrique du problème.

La méthode proposée permet trouver de solutions approchées également dans des cas linéaires que non-linéaires. L'application de la méthode on a illustré à l'aide de trois exemples numériques qu'on a ensuite comparé avec des solutions exactes.

ПРЯМОЙ ВАРИАЦИОННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛООБМЕНА  
ПРИ ВЫНУЖДЕННОЙ КОНВЕКЦИИ

**Аннотация**—В работе описывается прямой вариационный метод, позволяющий определить поле температур в задачах с конвективными потоками тепла. Достоинством этого метода является то, что в нем удовлетворяются все необходимые условия существования вариационного интеграла.

Кроме того, описывается построение приближенных решений, полученных на основе физической и геометрической модели рассматриваемых задач. Предлагаемый метод позволяет найти приближенные решения не только для линейных, но также и для нелинейных случаев.

Методика расчета иллюстрируется тремя численными примерами, результаты которых сравниваются с соответствующими точными решениями.